I. 이 책자는 國土統一院의 政策調査硏究計劃에 依據한 特殊課題 硏究報告書임.
II. 收錄된 內容은 刊行處의 意見을 반드시 反映하는 것은 아니며 統一問題에 關聯된 硏究에 資料로 提供되는것임.

南北韓關係

南北韓 關係에 適用할 各種 게임理論 모델의 開發硏究

(남북한관계)

硏究執筆責任 朴 淳 達

(略歷) 全北大學校 大學院卒 (1966)
美國 신시내티大學校 工學博士 (1971)
國防科學硏究所 硏究員 (1972)
韓國科學院 硏究員 (1974～)
서울大 工大 産業工學科長 (1974～)

刊行責任 梁 在 燾 (政策企劃室補佐官)

國土統一院 政策企劃室

目　　次

I. 南北韓 状況의 定立과 応用될 수 있는 게임모델

1. 南北 状況의 分析

어떠한 상황이든 政治的 상황을 명확히 把握한다는 것은 그 상황을 左右하는 要因이 너무나 많고 그리고 각 요인들 사이에 상호작용이 복잡하게 얽혀있기 때문에 자연 어렵게 된다. 따라서 이러한 상황의 분석은 주로 巨視的 안목에서 非定量的 行動主義的 方法에 의존하게 된다. 그러나 점점 政治構造가 判明되고 따라서 政治状況変動의 機構가 研究되면 점점 定量的 分析이 可能해지게 된다.

現在 南北韓의 政治的 関係는 世界 어느 나라보다 複雑한 処地에 놓여 있다고 볼 수 있다. 南韓, 北韓의 대치, 주변국가 즉, 日本, 中共, 소련과의 関係, 나아가 美国等 国際関係가 複雑하게 얽혀있다. 이러한 国際的 政治状況은 어떠한 単純한 原理에 움직이는 것은 아니며 어떤 哲理, 行動規範에 움직이는 것도 아니다. 어떤 境遇에는 힘이 左右되며 어떤때 국가 원수 個人의 취향에 의해 状況이 左右된다. 이렇게 볼때 状況을 파헤치고 状況의 解를 찾을 수 있는 節次, 基準이 대단히 모호하게 된다.

그러나 어떠한 경우이든 간에 어떤 政治状況의 変化에는 外的이든 内的이든 変化의 pattern이 있고 이 pattern을 추구하게

된다.

이러한 pattern은 전술한 바와 같이 그 構造를 明確히 把握하기 어려울 때는 巨視的 方法으로 狀況을 総體的으로 定性的으로 다루게 되며 그 構造를 나아가 변천 mechanism을 把握할 수 있을 때는 좀 더 微視的 分析的 方法을 使用하여 狀況을 다룰 수 있다. 그런데 巨視的 方法으로 狀況을 分析하든 微視的 方法으로 狀況을 分析하든 分析을 行動注意的 直管에 의존할 수도 있겠고 아니면 비록 狀況을 定量化하기는 힘들다 하더라도 모델등을 이용해서 좀 더 科学的으로 體係的으로 推進할 수 있다. 여기에서는 이러한 努力의 一部로써 앞으로 使用可能한 一部모델을 소개한다.

2. 게임모델

南北韓 狀況에 應用될 수 있는 게임모델을 크게 나누어 두가지로 分類할 수 있다. 하나는 게임 理論的 모델이며 또 하나는 게이밍 (Gaming) 的 모델이다.

Gaming모델은 實際의 狀況을 그대로 규모를 縮少하여 또는 構造를 단순화 시켜 再現 또는 豫想하여 實現시켜 보는 方法이다. 이러한 方法은 狀況構造의 變化를 把握하면 必要없으나 狀況의 構造를 把握치 못하면 어차피 實際를 再現시켜 보는 수 밖에 없다. 그러나 실제를 再現시킨다는 것은 많은 資源이 소요되기

때문에 따라서 규모를 縮少시키거나 또는 構造를 단순화시킬 수 밖에 없다.

그런데 이 Gaming은 實際 狀況을 模型化시켜 直接 사람이 조작하여 修行하는 方法이 있고 이러한 模型 및 조작을 Computer로 하여금 처리케 하는 方法이 있다. 前者를 manual game이라고 하고 後者를 Computer game이라고 한다.

이 Gaming을 適用 부서에 따라 Business game, War Gaming 등으로 알려져 있으며 Business game은 管理分野의 問題에 使用되는 것이고 War Gaming은 물론 軍事상의 問題를 Gaming으로 다루는 것이다.

이 Gaming에 비하여 게임 理論的 모델은 실제 狀況을 모델化하여 다루는 방법이다. 모델化하는데는 실제 狀況의 構造를 正確히 把握해야할 必要가 있으나 비록 把握치 못하더라도 모델化시킬 수는 있다.

그런데 이러한 모델은 實際 狀況을 모델화하는 것이기 때문에 따라서 실제 狀況에 적합한 모델은 실제 狀況 만큼 그 숫자가 많을 것이다. 다시 말하자면 모델의 수는 無限일 것이다. 그러나 실제를 그대로 모델化 한다는 것은 不可能할 것이기 때문에

實際 狀況을 分類해서 각 分類에 알맞는 모델을 만들게 된다. 따라서 제II장에서와 같은 모델의 分類가 나타나게 된다.

이러한 여러형태의 모델 중에서 2人 게임과 N人 게임 그리고 Game against Nature가 우리들의 南北韓 政治狀況에 應用될 수 있는 모델들이다. 이외에도 應用될 수 있는 모델이 있겠으나 여기에서 2人의 경우 N人의 경우의 政治狀況에 알맞는 모델만 여기서 소개하기로 한다.

Ⅱ. 게임 理論의 槪要

1. 定 義

게임 理論(Game theory)는 1944년에 발간된 Von Neumann and Oskar Morgenstern의 冊 " Theory of Games and Economic Behavior "이후로 定立된 學問이라고 할 수 있다. Game 理論도 넓은 의미의 數理計劃의 일종으로서 그 기초는 1920년대 부터 다져지기 시작했으나 1944년 그들의 冊이 発刊되면서 비로소 게임 理論이 학문적인 바탕이 굳건해지고 널리 알려지기 시작했다.

이 게임 理論은 어떠한 状況이든 利害상충(Conflict of Interest)이 일어나는 경우를 다루기 위하여 開発된 것이다.

이 이해의 상충은 経済뿐만 아니라 政治, 軍事 및 一般 社会 生活에 흔히 일어나는 문제이다.

예를 들어 두 競争会社가 販売市場 拡張을 위하여 투쟁하는 경우를 보자

한쪽 会社가 판매시장을 확보하면 다른 회사는 그만큼의 市場을 잃게된다. 이러한 경우는 두 会社가 치열한 비협조적 경쟁을 維持할 境遇이다. 그러나 어떤 제3자가 나타나 두개의 会社에 協商을 종용하여 協商이 이루어질 수도 있다. 이 경우 어떻게 협상에 応할 것인가가 문제로 나타난다. 경쟁 상대가 3者일

경우에는 그 중 두 회사가 결탁하여 다른 会社와 경쟁할 수 있게 되는데 이때 어떠한 條件으로 누구와 결탁해야 하느냐의 問題가 대두된다.

이러한 形態의 問題는 이와같이 経済的인 状況에서만 일어나는 것은 아니고 꼭같이 서로 대치하고 있는 軍事状況에도 応用될 수 있고 그리고 나아가 서로 이해가 얽혀있는 주변국가를 包含한 状況에서의 状況으로 다룰 수 있다.

일상 생활에서도 "섰다", "짓고땡" "Poker" 등의 놀음에서 어느 정도까지 벌려보느냐의 問題는 바로 이해상충의 문제이다.

가끔 夫婦사이에 休日을 보내는 方法에 알력이 생기는 수가 있다. 남편은 운동 경기장에 가자고 하고 부인은 아이들과 수영장에 가자고 한다. 이경우는 두사람의 어떤 행위에 대한 가치(utility)가 다르기 때문에 생기는 현상으로써 어떠한 결정이 양쪽에 다같이 만족스러운 것인가 하는 문제는 바로 이해상충의 문제로 처리될 수 있다.

이와같이 여러가지 형태의 이해상충의 문제를 다루기 위하여 발전된 것이 이게임 理論이다. 이러한 문제를 다루는 方法은 여러가지 있겠으나 이 게임 理論은 좀 더 計量的으로 처리하려고 한다. 따라서 예를 들어 게이밍(Gaming)에 비하여 이 게임 理論은 問題의 定立이 厳格하고 分析이 厳한 規則에 의하여 解도 明確하게 나타난다. 勿論 그대신 게이밍에 비하여 応用範囲가

제한되는 단점을 피할 수 없다.

2. 게임 理論의 分類

게임 理論은 각 이해상충의 状況에 알맞는 모델을 開発하게 된다. 그런데 이 모델의 分類는 사람이든, 단체이든, 国家이든 그 状況에 관련된 사람 또는 단체가 몇 명인가에 따라 2人 게임, 3人 게임, N人게임 등으로 분류한다. 그런데 2人이든 N人이든 解를 모색하는 도중 서로 協商이 가능한 경우가 있겠고 그렇지 않은 경우가 있다. 이런 경우를 각각 協調的(Cooperative) 非協調的(non-cooperative)라고 부른다.

그런데 이해의 관심이 한사람 밖에 없는 경우도 있다. 예를 들어 일주일 휴가를 얻어 여행을 갈까하는데 어디로 가는 것이 좋을 것인가 결정해야할 경우에는 위에서 말했던 경우와는 아주 다르다. 이경우의 모델을 Game against Nature라고 한다.

이외 이해상충에 관련된 者가 択할 수 있는 代案이 연속적인 경우 예를 들어 두 군함이 포격전을 전개한다고 할 때 포격의 가장 적합한 지점은 연속적인 성질을 가진다. 이러한 경우를 다룬 Differential Game이 있고 또는 確率의 概念을 내포한 statistic game등 여러 형태의 게임이 있을 수 있다.

- 게임 이론
  - 2 - 人게임
    - 非協調的 (Non-Cooperative)
      - 零 和 (Zero-Sum)
      - 非零和 (Non-Zero-Sum)
    - 協 調的 (Cooperative)
  - N - 人게임
    - 非協調的 (Non-Cooperative)
    - 協 調的 (Cooperative)
  - Game against Nature
  - Differential Game Statistic Game 등

그림 1. 게임의 分類

3. 게임의 型態

게임은 그 형태로 보아 크게 Extensive form과 Normal form으로 나누어 볼 수 있고 Normal form에서 N-人 게임의 특수한 경우를 다루는 Characteristic function form을 나누어 볼 수 있다.

Extensive form은 게임이 이루어지는 절차를 tree형태로 나타낸 것이다. 예를 들어 두사람이 동전을 던져 저녁사기의 내기를 한다면 이 狀況을 Extensive form으로 나타내면 그림 2와 같이 된다. 예로써 이 그림에서 player 1이 동전의 뒤를 던지고 player 2가 앞을 던졌으면 player 2가 이긴다는 것을 나타내고 있다.

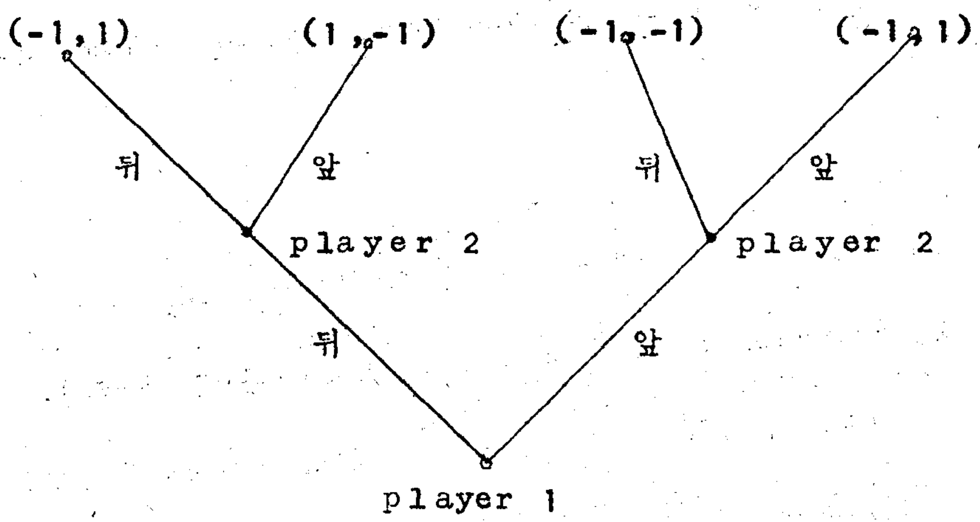

그림 2 동 전 게 임

Normal form은 게임을 数式的인 形態로 나타내 보려는 형태이다. 각 player가 각각 σ라는 代案을 選択했을때 일어나는 값을 π(, ,……,)고 두면 이 게임은 이 π의 함수를 통해서 처리할 수 있게 된다.

Charateristic fuction form은 N人 게임에서 2人 게임에서 일어나지 않는 結託(Coalition)의 현상이 일어날 수 있게 되는데 이러한 특성을 살리는 함수의 형태로써 게임을 처리할때 Characteristic function form이라고 한다.

그런데 Extensive form은 複雜한 경우를 나타내기에는 너무나 번잡하기 때문에 학문적으로 Game을 다룰때는 주로 Normal form과 characteristic function form으로 다루게 된다.

4. 用 語

게임 : 利害상충의 상황의 構造를 記述하는 規則

戰略(strategy) : 다른 名称으로 代案(alternative), action, option등의 용어가 있다. 戰略이란 게임을 応用하는 方案을 뜻한다.

単純戰略 (pure strategy) : 게임을 운용하는 戰略이 여러개가 있을때 그 중 하나만 選択하여 게임을 운용할때 이 選択된 하나의 戰略을 単純戰略이라고 한다.

混合戰略 (mixed strategy) : 게임을 운용하는 戰略集合에 주어지는 確率分布를 混合戰略이라고 한다.

利得(payoff) : 각 参加者가 각기 単純戰略을 選択했을때 나타나는 각 참가자에게 돌아가는 利得

Ⅲ. 2人 零和 게임

1. 特性 및 仮定

2人零和 게임은 우선 player (参加者)가 2이어야 한다. 勿論 이때 参加者는 個人일 경우도 있고 団體일 경우도 있으며 国家일 수도 있다. 어떠한 경우이든 利害가 관련된 者는 없어야 한다.

이 2人은 각각 戰略集合을 가지고 있고 각 참가자의 戰略은 상대방의 戰略과는 상호 独立이다. 그리고 각 참가자의 戰略集合각 상호간 역시 독립성이 유지되어야 한다.

그리고 2人이 게임을 운용할때 서로 의견을 교환하거나 協商할 기회가 전혀 없으며 또한 상대방이 어떠한 戰略을 選択할 것인지에 대해서도 전혀 情報가 없다. 따라서 전혀 상대방을 모른체 게임을 하게 된다. 이런 상황을 non-cooperative, strictly competitive라고 하며 零和게임은 이러한 상황하에서 이루어진다.

2人零和게임에서 참가자1에 대한 利得은 바로 参加者 2의 損害이고 그 반대도 成立하는 참가자 2人의 利得과 損害가 일치하는 경우를 다루게 된다. 따라서 각 참가자의 이득과 損害를 합하게 되면 零이 되고 만다.

이 2人零和게임은 결국 참가자1은 그의 이득을 最大化하려고

하고 참가자 2는 그의 損害를 最小化하려고 한다. 결국 참가자 1에게는 어떠한 戰略이 그의 이득을 최대화시키는 것이며 참가자 2에게는 어떤 戰略이 그의 損害를 최소로 줄이는 것인지를 찾아 내려고 한다.

2. 問題의 定立

참가자 1의 戰略을 A_1, A_2, ……, Am이라고 하고 參加者 2의 戰略을 B_1, B_2, ……, Bn라고 하고 그 集合을 각각 A, B라고 하자. 그리고 參加者 1이 Ai 라는 戰略을 그리고 참가자 2가 Bj라는 戰略을 選択했을때 참가자 1에게 돌아오는 利得 (payoff)을 Uij, 참가자 2에게 돌아오는 이득을 -Uij라고 하자

이때 2人零和게임을 行列로 표시할 수 있으며 보통 參加者 1 즉 이 게임에서 참가자 2人중 利益面에서 基準을 삼는 者를 왼쪽 측 列의 위치에 두고 상대방을 윗쪽 측 行의 위치에 둔다. 따라서 다음과 같은 행열이 된다.

참 가 자 2

$$
\text{참가자 1}\quad
\begin{array}{c}
\\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m
\end{array}
\begin{pmatrix}
B_1 & B_2 & \cdots & B_n \\
U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1n} \\
U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2n} \\
 & & & \\
U_{m1} & U_{m2} & \cdots & U_{mn}
\end{pmatrix}
\quad \begin{array}{l}\text{利得行列}\\ \text{(payoff matrix)}\end{array}
$$

여기서 U_{ij}는 參加者1에게는 利得, 參加者2에게는 損害를 뜻하게 된다. 이 行列을 (A,B,U)라고 표기하기로 한다. 이 行列을 利得行列(payoff matrix)라고 하며 2人零和게임 운용의 기본 모델이 된다.

3. 2人零和게임의 예

2人零和게임은 일상생활, 군사, 정치등 여러분야에 흔히 찾을 수 있는 게임의 종류이다. 여기 소개하는 게임은 Mcdonard와 Tukey가 1949年 Fortune誌에 発表한 Colonel Blotto게임으로 알려져 있는 게임이다.

Colonel Blotto가 그의 적은 꼭같은 전투능력을 가진 연대를 각각 4개, 3개를 가지고 있다. 그런데 高地 2개를 두고 쟁탈전을 展開하는데 각각 어떠한 配置가 가장 적절할 것인가하는 問題이다.

지금 Colonel Blotto가 2개의 고지를 점령키 위하여 제1, 제2 고지에 병력을 配置할 수 있는 代案은 (4,0), (0,4), (3,1), (1,3), (2,2)의 다섯가지가 있다. 예를 들어 (4,0)는 제1 고지에 4개 연대, 제2 고지에 하나도 配置하지 않는 戰略을 뜻한다. 이에 비하여 적군은 (3,0), (0,3), (2,1), (1,2)의 4가지가 있다. 그런데 Colonel Blotto의 이득함수 (payoff function)는 예를 들어 1의 戰略(3,1)과 적의 戰略

(2,1)이 서로 전개되었을때 Colonel Blotto는 적의 2개 연대를 전멸시키고 제1 고지를 차지할 수 있으며 제2 고지에서는 각각 1개 연대씩 대치하여 승부가 나지 않는다. 그래서 이때의 利得(payoff)을 적 2개 연대를 섬멸시켰으므로 2점, 그리고 고지 제1을 차지했기 때문에 1점 도합 3점을 Colonel Blotto가 얻게 된다. 이와같은 方法으로 利得을 구하게 되면 그림 3과 같은 利得行列을 구하게 된다.

이러한 예에서는 항상 이 이득함수가 論議의 대상이 된다. 이 이득함수가 실제를 그대로 반영하고 있는 것인가 반드시 이렇게 実数로 나타날 수 있는 것인가등 여러가지 문제가 나타난다. 그러나 실제 狀況을 2人零和 게임으로 定立할때 돈이라든가 어떤 특정가치의 측정기준 즉 utility가 있게 되면 그 이득함수는

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{적} \\
 & \begin{array}{cccc} (3,0) & (0,3) & (2,1) & (1,2) \end{array} \\
\text{Colonel Blotto} \begin{array}{c} (4,0) \\ (0,4) \\ (3,1) \\ (1,3) \\ (2,2) \end{array} &
\left[\begin{array}{cccc}
4 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 4 & 1 & 2 \\
1 & -1 & 3 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 3 \\
-2 & -2 & 2 & 2
\end{array} \right.
\end{array}
$$

그림 3 Colonel Blotto 게임

Colonel Blotto 게임과 같이 実数函数의 이득행열을 구할 수 있다。 그렇지 못할 경우 이득함수가 実数函数로 나타날 수 없으면 그解를 구하기 힘들게 된다.

4. 解의 槪念

(1) 参加者 1과 2의 利益과 損害

Colonel Blotto게임의 경우 Colonel Blotto가 그의 利得을 최대로 增大시키기 위해서는 예를 들어 (4,0)를 選択하는 것이 좋다。 그런데 그의 적이 Colonel Blotto의 의사를 짐작했다면 (0,3)의 戦略을 選択하고말 것니다。 그러면 Colonel Blotto는 4란 이득을 바라다가 0의 利得에 만족해야만 하게 된다.

더 나아가 Colonel Blotto가 적의 의중을 짐작하여 (0.4)란 戦略을 選択하면 4란 이득을 다시 얻을 수 있으나 그의 적이 다시 이 Colonel Blotto의 選択에 대해 (3,0)이란 戦略을 選択해 버리면 다시 Colonel Blotto는 0이란 利得에 머물러야 한다.

이와같이 利益의 최대화, 損害의 최소화에 대한 論議를 되풀이하면 해답없이 끝없이 전개된다.

그런데 한편 Colonel Blotto의 어떤 戦略에 대해 적이 가장 좋은 戦略을 選択했을 때 값을 생각해 보자 이때의 값을 安全水準이라고 한다.

Colonel Blotto의 戦略 : (4,0), (0,4), (3,1), (1,3), (2,2)

적의 가장 좋은 戰略 : (0,3), (3,0), (0,3), (3,0), (3,0)

Colonel Blotto의 이득 : 0, 0, -1, -1, -2 이때 Colonel Blotto의 安全水準을 가장 높이는 戰略은 (4,0), (0,4)이다.

2人零和게임에서는 Colonel Blotto의 가장 좋은 戰略이란 이러한 安全水準을 가장 높이는 戰略을 뜻한다. 그러니까 게임理論이란 Colonel Blotto에서 어떤 戰略이 그에게 가장 많은 이득을 가져다 주는 戰略을 말해주기 보다는 그에게 最小 어느 정도를 보장할 수 있는 戰略을 말해줄 뿐이라 할 수 있다.

參加者2 즉 Colonel Blotto의 적에 대해서도 이와같은 論議가 그대로 적용된다. 게임이론은 적에게 결국 그의 損害를 줄이는데 최대 보장하는 戰略 즉 安全水準을 최대화하는 戰略을 말해준다.

적의 戰略 :	(3,0)	(0,3)	(2,1)	(1,2)
Colonel Blotto의 가장좋은 戰略	(4,0)	(0,4)	(3,1)	(1,3)
적의 損害 (안전수준)	-4	-4	-3	-3

즉 Colonel Blotto게임의 경우 (2,1), (1,2)가 된다.

(2) 鞍 点 (Saddle point equilibrium point)

2人零和게임에서는 결국 참가자1은 그의 安全水準을 최대화하는 戰略을 찾는 것으로써 $\underset{i}{\mathrm{Max}}\ \underset{j}{\mathrm{Min}}\ U_{ij}$ 가 해당하는 戰略을 選択하게 되고 참가자 2는 $\underset{j}{\mathrm{Min}}\ \underset{i}{\mathrm{Max}}\ U_{ij}$ 가 해당되는 戰略을 選択하게 된다.

그런데 $\underset{i}{\mathrm{Max}}\ \underset{j}{\mathrm{Min}}\ U_{ij} = \underset{j}{\mathrm{Min}} \cdot \underset{i}{\mathrm{Max}}\ U_{ij}$가 成立하는 U_{ij}가 있을때 (i, j)를 鞍点이라고 하고 U_{ij}를 게임의 値(the value of the game)이라고 한다. 그런데 이 鞍点은 게임에 따라 있을 수도 있고 없을 수도 있다. 예를 들어

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

와 같은 경우에는 (1, 1)이 鞍点이며 4가 게임의 値가 된다.

그러나 $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

의 경우에는 鞍点이 없다.

(3) 混合戰略

전술한 바와 같이 다음의 게임은 鞍点이 없다. 이 게임

$$\begin{array}{ccc} & & \text{참가자 2} \\ & & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \text{참 가자 1} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

에서 참가자 1의 안전수준을 최대화하는 것은 A_1으로써 2, 그리고 참가자 2는 B_1으로써 3이 된다. 따라서 $\underset{i}{Max} \cdot \underset{j}{Min} \cdot U_{ij} \neq \underset{j}{Min} \cdot \underset{i}{Max} \cdot U_{ij}$가 되기 때문에 鞍点이 없다. 그런데 예를 들어 참가자 1이 $(\frac{1}{2}A_1, \frac{1}{2}A_2)$라는 確率分布로써 즉 A_1, A_2를 각각 50%의 확율로써 섞어서 選択하게 되면 그에게

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

로써 참가자 2가 어떠한 戰略을 選択하든 $\frac{5}{2}$라는 값이 그에게 보장된다. 단순 戰略을 選択했을 때는 2밖에 보장받지 못했지만 이와같이 混合戰略을 使用하면 $\frac{5}{2}$가 보장받게 된다. 참가자 2에도 마찬가지로 B_1과 B_2를 $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$의 확율분포로 混合戰略을 적용하면 참가자 2에게도 최소 $\frac{5}{2}$가 보장받게 된다.

지금 참가자 1과 2의 混合戰略을 각각 X, Y라고 하자. 그러면 참가자 1이 보장받는 양은 결국 Y, X

$$\underset{Y}{Min} \cdot \underset{X}{Max} \cdot XUY$$

이 되고 참가자 2는

$$\underset{X}{Max} \cdot \underset{Y}{Min} \cdot XUY$$

이 된다. 이 두 값 사이에는

$$\underset{X}{Max} \cdot \underset{Y}{Min} \cdot XUY' \leq \underset{Y}{Min} \cdot \underset{X}{Max} \cdot XUY'$$

이 成立되며 等式이 成立될 때 그 값을 게임의 値라고 한다.

(4) 게임理論의 基本定理

參加者1과 2의 混合戰略 $X = (X_1, x_2, \cdots\cdots, xm)$,

$Y = (y_1, y_2, \cdots\cdots, ym)$ 가운데 어떤 混合戰略 X^*, Y^*가 있어서 게임의 値 N와 다음과 같은 等式이 成立될 때 (X^*, Y^*)를 이 게임의 解라고

$$X^* U Y^{*\prime} = N$$

하고 X^*, Y^*를 參加者1과 그의 最適戰略(optimal strategy)라고 한다.

게임理論의 基本定理 : 2人零和게임에서는 어떤 값 N가 存在하여 다음 等式이 成立한다.

$$\underset{x}{\text{Max}} \cdot \underset{Y}{\text{Min}} \cdot XUY' = \underset{Y}{\text{Min}} \cdot \underset{x}{\text{Max}} \cdot XUY'$$

5. 解를 구하는 方法

(1) 축차近似法(Successive Approximation)

이 方法의 근본 槪念은 어떤 參加者의 単純戰略에 대해 상대방의 최선 戰略을 選択하는 作業을 継続한다면 결국 각 參加者가 選択할 混合戰略을 구할 수 있다는 것이다.

우선 記号를 説明해 두자

N : 回 数

i(N) : N번째 参加者 1 이 選択하는 単純戦略

j(N) : N번째 참가자 2 가 選択하는 単純戦略

Ki(N) : 참가자 2 가 계속 i 란 単純戦略을 사용할 때
N번째후 참가자 1 이 받는 利得

Hi(N) : 참가자 1 이 계속 i 란 単純戦略을 사용할 때
N번째후 참가자 2 가 받는 利得

$\underline{V}(N)$: N번째후 참가자 1 이 平均 최소한 예상하는 액수

$\overline{V}(N)$: N번째후 참가자 1 이 平均 최대한 예상하는 액수

이때 $\underline{V}(N) = \frac{1}{N} \underset{j}{\mathrm{Min}} \cdot n \cdot kj\ (N)$

$$\overline{V}(N) = \frac{1}{N} \underset{i}{\mathrm{Max}} \cdot x\ Hi\ (N)$$

가 된다.

지금 예로써 다음과 같은 게임을 들어 보자

참가자 2

$$\text{참가자 1} \quad \begin{array}{c} \\ ① \\ ② \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

参加者 1 이 ①을 選択하면 $K_1(N)$ 즉 참가자 2 가 $\boxed{1}$ 을 계속 選択할때 참가자 1 이 받는 액수는 2 가 된다. 꼭같이 $K_2(N)$는 1, $K_3(N)$는 0 가 되며 $\underline{V}(N)$는 결국 2, 1, 0 중 최소량 0 가 된다. 이것은 결국 参加者 1 의 戦略 ①에 대해서는 참가자 2 가

③의 戰略을 選択하는 것이 가장 좋다는 뜻이 된다. 그러면 参加者2의 戰略 ③에 대해서 参加者1이 ①을 選択하면 0을 받게 되고 즉 $H_1(N) = 0$가 되고 마찬가지로 $H_2(N) = 3$, $H_3(N) = -3$가 되며 $\bar{\nabla}(N) = 3$이 된다. 이것은 참가자2의 ③에 대해 참가자1은 ②를 選択하는 것이 가장 좋다는 結論이 나온다. 이러한 절차를 계속하면 그림2와 같이 된다.

i(N)	K_1(N)	K_2(N)	K_3(N)	$\underline{V}$(N)	j(N)	H_1(N)	H_2(N)	H_3(N)	$\bar{\nabla}$(N)	$\bar{\nabla}-\underline{V}$
①	2	1	0	0	③	0	3	-3	3	3
②	4	1	3	0.5	②	1	3	0	1.5	1
②	6	1	6	0.33	②	2	3	3	1.0	0.67
②	8	1	9	0.25	②	3	3	6	1.5	1.25
③	7	4	6	0.8	②	4	3	9	1.8	1

……………………………………

그림4 축차근사법

이러한 節次를 계속할 수 있다. 횟수를 많이하면 할수록 정확한 解를 구할수 있다. 결국 解는

$$X' = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{①의 횟수}{N},\ \frac{②의 횟수}{N},\ \frac{③의 횟수}{N}\right)$$

$$Y' = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{①의 횟수}{N},\ \frac{②의 횟수}{N},\ \frac{③의 횟수}{N}\right)$$

가 된다. 그러나 횟수를 무한히 한다는 것은 불가능하기 때문에 요구되는 정확도에 따라 횟수를 조정할 수 있다. 횟수를 5번으로 한정했을때 解는

$$X = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right), \qquad Y = \left(\frac{0}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

이 된다.

(2) 線型計劃法에 의한 解法

어떤 게임 (A, B, U)가 다음과 같이 주어져있다. 그리고

$$(A, B, U) = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots\cdots\cdots & U_{1}m \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ Um_{1} & Um_{2} & \cdots\cdots\cdots & Umm \end{pmatrix}$$

이 게임의 値를 V라고 하자. 그러면 참가자 1의 어떠한 混合戰略 $X = (x_1, x_2, \cdots\cdots, Xm)$에 대해서도 다음 不等式이 成立한다.

$$\sum_{i=1}^{m} Uij\ Xi \geqq V, \qquad j = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

그런데 2人零和게임에서는 참가자 1은 다음 등식을 만족하는 $X^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots\cdots, xm^*)$를 구하고자 한다.

$$\underset{j}{\mathrm{Min}}\ n \cdot \sum_{i=1}^{m} Uij\ Xi^* = V$$

여기서 $xi/V = Zi$라고 두면 결국 이 問題를 다음과 같은

線型計劃法으로 변환된다.

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{m} Zi$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^{m} Uij\ Zi > 1, \quad j = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

$$Zi > 0 \quad \forall i$$

이 線型計劃 問題를 푼 다음 $Xi = V \cdot Zi$를 구하면 결국 참가자 1의 最適解를 구하게 된다.

참가자 2에게는 어떤 混合戰略 $Y = (Y_1, Y_2, \cdots\cdots\cdots, Ym)$에 대해

$$\sum_{j=1}^{m} Uij\ Yi \leqq V*, \quad i = 1, 2, \cdots\cdots\cdots, m$$

가 成立되고 다음 式을 만족시키는 $Y^* = (Y_1^*, Y_2^*, \cdots\cdots Yn^*)$를 구하고자 한다.

$$\underset{i}{\text{Max}} \sum_{j=1}^{m} Uij\ Yi^* = V$$

결국 $Yj/V = Wj$라고 두면 이 문제는

$$\text{Max} \sum_{j=1}^{m} Wj$$

Subject to

$$\sum_{j=1}^{n} Uij < 1, \quad i = 1, 2, \cdots\cdots\cdots, m$$

$$Wj > 0, \quad \forall j$$

와 같이 되어 線型計劃問題가 된다.

Ⅳ. 2人非분화게임 (Two Person Non-Zero-Sum Game)

2人非零和게임은 零和게임의 경우 參加者1과 그의 利益이 完全히 상반되는 경우와 달리 각각의 利益과 損害가 일치하지 않는 경우를 통틀어 일컫는다. 이런 경우 利益과 損害의 差異가 무한일 수도 있겠으나 여기에서는 有限한 境遇만을 다룬다. 零和게임은 非零和게임의 특수한 경우로 볼 수 있다.

이 非零和게임에서는 두참가자가 正確히 상반되는 利益과 損害額을 가지기 때문에 零和게임이 하나의 行列 즉 利得行列로써 표현될 수 있는데 비해 이 非零和게임에서는 두개의 行列로써 表現하게 된다.

지금 參加者1의 戰略을 i = 1, 2, ……, m라 두고 參加者2의 戰略을 j = 1, 2, ……, n라고 둘때

aij : 參加者1이 i戰略을 그리고 參加者2가 j戰略을 사용할때 參加者1이 받는 利益

bij : 參加者1이 i戰略을 그리고 參加者2가 j戰略을 사용할 때 參加者2가 받는 利益

라 둔다. 그러면 이 非零和게임은 Bimatrix 즉,

$$(A, B) = \begin{bmatrix} (a_{11}, b_{11}), (a_{12}, b_{12}) \cdots\cdots\cdots\cdots (a_1n, bm) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (am_1, bm_1), (am_2, bm_2) \cdots\cdots\cdots\cdots (amn, bmn) \end{bmatrix}$$

로 표현된다. 이게임을 Bimatrix게임이라고 부른다.

이 Bimatrix게임은 두가지 경우가 있다. 즉, 첫째 어떤 형태의 결탁 (collusion)이라도 許容되지 않는 非協助的(Non-Cooperative)의 境遇

둘째 결탁(Collusion)이 許容되는 協助的(Cooperative)의 경우

이 장에서는 이 두경우를 각각 별도로 다루기로 한다.

1. 非協助的 게임(Non-Cooperative Game)

(1) 仮定 및 條件

참가자는 2名이며 2人零和게임에서의 條件과 같다. 단 이 게임에서는 參加者 2名이 각각 얻는 利益과 損害가 합쳐 零이 되지 않는다.

(2) 예 1

Battle of Sexes로 알려진 예로써 부부 두사람이 休日을 즐기는 方法을 論議하는 도중 運動競気 참관과 劇場가는 두 方案이 나와 意見이 엇갈린다. 이 경우 남편과 부인이 運動競気와 영화에 대한 자기 가치가 다르기 때문이고 그러나 각각 떨어져서 각기 좋은 것을 選択한다는 것은 또한 바람직하지 않다. 그래서 다음과 같은 利得行列(payoff matrix)이 나타난다.

		부인	
		운동경기	영 화
남 편	운동경기	(2, 1)	(-1, -1)
	영 화	(-1, -1)	(1, 2)

즉, 부부가 다같이 운동경기 참관하러 갈때는 부인보다는 남편이 利得이 더욱 많다. 다같이 영화관람으로 갈 경우는 반대가 된다. 그러나 이 두경우 모두 각기 흩어져서 가는 것보다는 낫다.

(3) 예 2

A.W.Tucker가 제시한 예로써 Prisoner's dilemma라고 알려져 있는 예이다. 지금 두사람의 서로 범행을 알고 있는 범법자가 잡혔다. 그런데 이 두사람이 서로 상대방의 범법행위를 알고 있기 때문에 犯罪行為를 自白할때와 안할때, 그리고 서로 協同해서 침묵을 지킬때와 아닐때에 따라 형량 달라진다.

		범법자 2	
		침 묵	자 백
범법자 1	침묵	각각 1년	범법자 1 : 10년 범법자 2 : 3개월
	자백	범법자 1 : 3개월 범법자 2 : 10년	각각 8년

이것을 實数値로 고친 결과는 다음과 같다. 물론 실수치가 반드시

$$\begin{pmatrix} (0.9,\ 0.9) & (0,\ 1) \\ (1,\ 0) & (0.1,\ 0.1) \end{pmatrix}$$

이렇게 되어야 한다는 것은 아니다.

(4) 平衡点 (Equilibrium Point)

주어진 Bimatrix(A, B) 에서 한쌍의 混合戰略 (X^*, Y^*) 가 다음 조건을 만족시키면 평형에 있다. (in eguilibrium) 고 말한다.

$$X\ A\ Y^{*\prime} \ < \ X^*\ A\ Y^{*\prime}$$

$$X^* B\ Y' \ < \ X^*\ A\ Y^{*\prime}$$

예 1 의 이런 평형점은 ((1,0), (1,0)) 와 ((0,1), (0,1)) 이 된다. 즉, 다같이 운동경기에 참관하러 가거나 다같이 영화관람하러 가는 것이 평형점이 된다. 그러나 예를 들어 ((0,1), (1,0)) 는 평형점이 되지 못한다.

定理 모든 Bimatrix게임은 적어도 하나의 평형점을 가진다.

(5) 解

非協助的 게임은 모든 평형점의 쌍들이 서로 可換(interchangible) 일때 Nash의 의미로 可解(Solvable in the sense of Nash) 라고 한다.

예 1 의 경우 평형점이 ((1,0), (1,0)) 와 ((0,1), (0,1)) 이 있으나 서로 가환이 아니다. 즉, ((1,0), (0,1)) 은 평형점이

되지 못한다. 따라서 Nash의 의미로 非可解이다. 그러나 예 2의 경우 평형점은 ((0,1), (0,1))로써 可解가 된다.

2. 協助的게임 (Cooperative Game)

(1) 仮定 및 條件

이 게임에서는 참가자 2人 상호간에 협상이 가능하다. 말하자면 다같이 약속하여 어떠한 戰略을 択할 수도 있고 또는 사전에 자기는 어떤 戰略을 択한다고 선언하고 択할 수도 있다. 이러한 事前 의사전달도 결국 게임운영에 영향을 미치게 된다.

(2) Von-Neumann과 Morgensterm의 解

참가자들이 協助해서 게임운영할때 얻어지는 이득 (payoff)의 集合을 R′라고 두자. 예를 들어 예 1 Battle of Sexes의 경우 R′는 그림 5과 같이 된다.

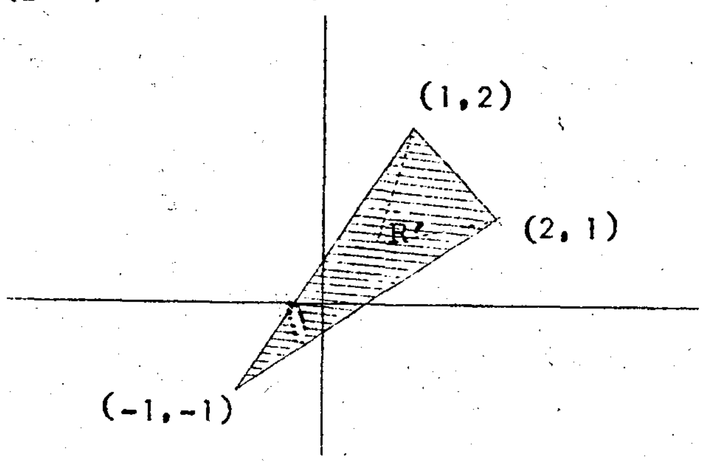

그림 5 예 1의 R′

정의 Undominated Outcome을 R′의 joint maximal set 또는 Pareto optimal set라고 한다.

예를 들어 그림6의 경우 Pareto optimal set는 선분 abcd가 된다.

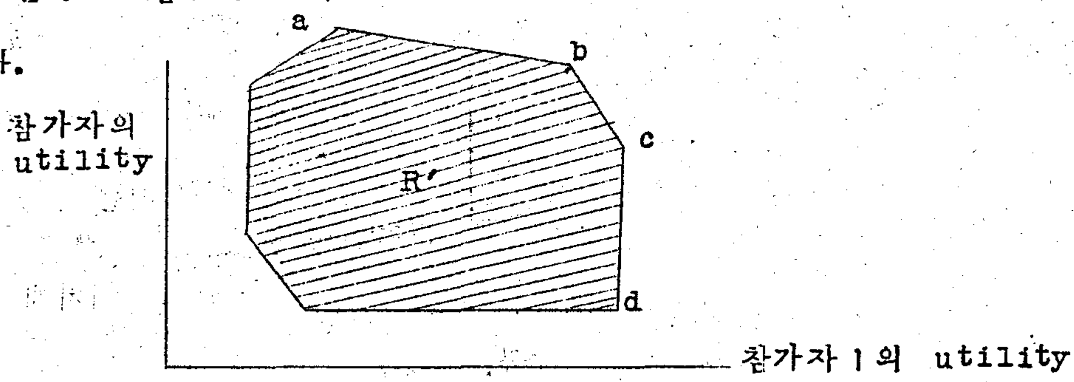

그림 6 Pareto optimal set

그런데 여기서 각 참가자에게 그가 Maximin 戰略을 사용해서 독자적으로 보장받을 수 있는 최대량을 보증하는 R′의 joint maximal set로써 그 게임의 negociation set를 형성하게 된다.

이 negociation set를 Von Neumann과 Morgenstern의 Cooperative Solution이라고 한다. 그림6의 경우 그림7와 같은 解를 얻게된다.

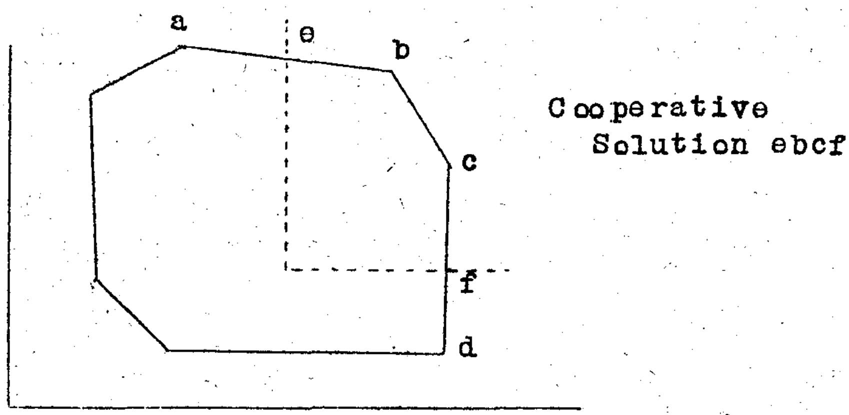

그림7 Cooperative Solution

V. N人 게 임

1. 概 要

N人게임이 2人게임과 크게 다른 점은 2人의 게임 경우 結託(Coalition)이란것이 없지만 N人게임 즉 3人이상의 게임의 경우 그 일부가 서로 結託하여 타인과 대결할 수 있는 가능성이 있다는 것이다. N人게임에서는 이러한 結託때문에 複雜한 問題가 많이 야기된다. 結託을 모든 可能한 境遇를 모두 許容할 수도 있고 어느 정도의 제한을 가하면서 처리할 수도 있다.

그리고 side payment의 문제도 야기된다. 結託을 할 때 結託하는 상대방에게 별도의 코미션이든 어떠한 형태의 side payment을 줄 수 있다. 따라서 N人게임에서는 참가자 상호의사를 소통하여 結託이 可能한지 아닌지 또한 side payment가 있는지 없는지 등으로 분류할 수 있다.

2. 모델의 定立

참가자가 N人이 있고 이 참가인 집합을 In이라고 두고 각 참가인의 戰略集合을 각각 S_1, S_2, ……, Sn과 둔다. 그리고 각 참가자가 Ri라는 戰略을 択할때 참가자 i에게 돌아오는

利益이 $Mi(A_1, A_2, \cdots\cdots, Sn)$가 되는 n개의 実数値 利益函数 (Payoff function) $M_1, M_2, \cdots\cdots, Mn$이 있다고 하자. 이때 이러한 形態로써 게임을 처리할 때 Normal form이라고 한다.

여기에서 Si의 Si를 각기 單純戰略이 되겠으나 각 si에 대해 i(si)의 확율을 주는 $i = (i(s_1), i(s_2), \cdots\cdots, i(sn))$을 생각하면 이 i가 곧 混合戰略이 된다. 이 混合戰略에 대해서는 $i(si) > 0$ 그리고 $\sum_{siESj} i(si) = 1$이 된다. 그러면 $Mj(s_1, s_2 \cdots\cdots, k, \cdots\cdots sn) = \sum_{siESk} i(si)\ Mj(s_1, s_2 \cdots\cdots, sk, \cdots\cdots, Sm)$가 成立한다.

3. 非協助的 게임(Non-Cooperative Game)

N人 비협조적게임은 2人非協助的 非零和게임과 비슷하다. 이 게임에서도 역시 문제가 되는 것이 平衡点(equilibrium point)의 存在 여부이다.

지금 임의의 参加者 i의 戰略集合 Si에 있어 어떠한 戰略 ri에 대해서도 다음의 不等式이 成立하면 n-tuple$(s_1, s_2, \cdots\cdots, sn)$을 平衡点이라고 한다. 이렇게 平衡点을 정의하면 $Mi(s_1, s_2, \cdots\cdots, sn) > Mi(s_1, s_2, \cdots\cdots, ri, \cdots\cdots, sn)$ 다음과 같은 Nash의 정리가 成立된다.

整理 : Nash의 기본정리

混合戰略集合에서의 모든 有限게임은 최소한 하나의 平衡点이 存在한다.

4. 協助的 게임 (Cooperative Game)

(1) Side Payment

Side payment는 여러가지 形態로 나타난다. 선거에서 일정한 액수를 주고 有力한 후보를 사전에 출마포기 선언케할때 거래되는 것도 이 side payment이다. 어떤공사를 수수할 때 코미션을 주고 공사를 낙찰받게 될때 거래되는 코미션도 하나의 side payment이다. 이러한 side payment는 돈뿐만 아니라 물건, 노력봉사등 여러가지 形態로 나타난다.

예로써 세사람이 게임을 하는데 어느 두사람이 結託을 하면 제3째 사람은 結託한 두사람에게 각각 1씩 주어야 한다. 그러니까 가능한 3가지의 이득형태는 (-2, 1, 1), (1, -2, 1), (1, 1, -2)가 된다. 이 게임에서는 세사람이 두사람씩 結託할 수 있는 條件이 꼭같기 때문에 이 利得形態가 꼭같이 일어날 수 있다. 따라서 세이득이 안정된(stable)상태에 있다.

그러나 예를 들어 參加者 2와3이 結託을 맺을때는 參加者 2와 3에서 각각 1대신에 2에게는 1.1을 3에게는 0.9를 지불하기로 한다고 하자. 그러면 참가자 2는 結託에 어려운 처지에 놓이게 된다. 왜냐하면 參加者3은 參加者1과 結託하려고 할 것이기 때문이다. 그러나 이때 參加者2가 3에게 0.1의 side payment를 주겠다고 제의하면 結託에 어려움이 없어진다.

이 side payment는 여러 형태로 나타나고 각 side payment

의 參加者의 価値가 각각 다르다. 그런데 이 각각의 가치가 서로 比較할 수 없게 되면 게임의 운용이 不可能하게 된다. 그리고 여러가지 형태의 이득 (payoff) 이 混用하게 되면 여러가지 複雜한 問題가 発生한다. 따라서 앞으로는 転移 可能한 (transferable) 한 価値尺度 (utility) 가 있다고 가정한다. 즉 N人게임을 이 utility를 사용하여 Normal form으로 처리하게 된다.

(2) 結託 (Coalition)

參加者의 集合 In에서 이 In의 部分集合을 結託이라고 한다. 이 부분집합은 參加者 In에서 部分集合 S만큼 서로 結託한다는 뜻이다. 어떠한 結託도 許容한다면 In의 모든 部分集合이 結託이 되는 셈이다. 따라서 結託이 許容되지 않는 경우 예를 들어 非協助的인 경우에는 2人以上의 結託이 이루어지지 않기 때문에 예를 들어 $I_3 = \{1, 2, 3\}$ 이라고 할 때 이 I_3의 結託構造는 $(\{1\}, \{2\}, \{3\})$ 이게 된다. 그러나 모든 結託이 許容된다면 $(\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1, 2, 3\}$ 이게 된다.

(3) 特性函数 (Characteristic function)

特性函数란 參加者의 集合 In의 部分集合 S에 実数를 주는 函数로써 다음 조건을 만족하는 実数値函数를 말한다. 즉

$$v : \{ S(In) \} \rightarrow \{ 実数 \}$$

$S \rightarrow v(S)$: 어떤 실수,

로써　　i) $v(In) = 0$

ii) $v(S) = -v(-S)$, vSCIn을 만족하면 特性함수라 한다.

그런데 零和게임이 되면 특성함수는 다음의 條件들을 만족시킨다.

(i) $v(In) = 0$

(ii) $v(S) = -v(-S)$, 단 모든 S I에 대하여

(iii) $v(\phi) = 0$

(iv) 만일 R과 S가 In의 부분집합이고 $R \cap S = \phi$이면

$$v(R \cup S) > v(R) + v(S)$$

그러나 非零和게임이 되면 조건 (ii) 와 (iii) 은 만족되지 않는다. 그런데 참가자들중 結託이 단독으로 行動하는 것보다 利롭지 못할 때 이 게임을 inessential game이라고 한다. 즉, 조건 (iv) 에서 等式이 되는 경우이다. 즉

$$v(RVS) = v(R) + v(S)$$

따라서 어떤 게임이 inessential이 되는 必要充分條件은 다음 조건을 만족시키는 것이다.

$$v(Im) = \sum_{ij}^{n} v(\{i\})$$

inessential이 아닌 게임은 모두 essential게임이라고 한다.

(4) S - 同値 (S-equivalance)

두사람이 예를들어 어떠한 戰略을 選択하는데 이득(payoff)이

한사람은 圓으로 되 있는 利得利列을 사용하고 다른 사람은 鉛으로 되있는 利得行列을 使用한다고 할때 두사람의 選択은 조금도 틀리지 않는다. 이런 경우는 戦略的으로 同値인 것이다. 그래서 두개의 特性函数 v와 W가 있는데 In의 모든 部分集合 S에 대하여 $v(S) = C\cdot v'(S)$, 단 C는 상수, 가 成立할 때 v와 v'를 戦略的으로 同値라고 한다. 나아가 두함수가 어떤 상수만큼 차이가 나드라도 꼭같은 結果가 나타난다.

그래서 n개의 상수 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$와 陽의 상수인 C가 있어 모든 S In에 대해 $v'(S) = C\cdot v(S) + \sum_{i\ S} a_i$가 成立하면 특성함수 v와 v'를 가진 두 N人게임은 서로 S-同値라 한다.

(5) 正規化 (Normalization)

S-同値의 関係는 反射·対称 및 転移律을 만족시키기 때문에 同値関係가 成立한다. 따라서 S-同値로써 특성함수를 및 Class로 分類할 수 있다.

(i) -1, 0의 正規化

Von-Neuman과 Margenstern의 정리 : 각각 동치 class에서 다음 관계식을 만족시키는 특성함수는 단 하나뿐이다.

$$v(\{i\}) = -1, \quad i \ \ In$$

그리고

$$v(In) = 0$$

이것을 특성함수들의 동치 Class의 reduced form이라고 부른다.

(ii) 0, 1의 正規化

이것은 상기조건에서 $v(\{i\}) = 0$ 그리고 $v(In) = 1$ 이 되면 바로 0, 1의 正規化가 된다.

(6) Imputation 과 Core

게임운영 동안에 각 參加者가 Normal form의 利得行列에서 얻어지는 利得과 그리고 side payment를 전부 합쳐 參加者 i의 利得合計를 xi라고 하자. 그러면 n 參加者에 대해서는 n-tuple 즉 $X = (x_1, x_2, \cdots\cdots, xn)$가 생긴다.

이때 다음 두 조건을 만족시키면 이 n-tuple을 특성함수 v를 가진 게임의 imputation이라고 부른다.

(i) $v(\{i\}) \leq xi \quad \forall i \in In$

(ii) $\sum_{i \in In} xi = v(In)$

그리고 다음 조건을 두가지로 만족시키면 Core라 부른다.

(iii) $v(S) < \sum_{i \in S} xi, \quad \forall S \subset In$

따라서 Constant-Sun의 essential게임을 包含하여 많은 게임이 空集合의 Core를 가지게 된다. Constant-Sum 게임에서 Core가 空集合이 아니면 그 게임은 inessential이게 된다. 그리고 平衡에 도달하게 되는 이득은 바로 imputation이란 것을 알

수 있다.

(7) 解

어떤 게임에서 結託을 T라고 두자 그러면 이 T는 In의 부분 집합들로 이루어져 있는 集合이 된다. 예를 들어 $I_3 = \{1, 2, 3\}$이라고 할때 $(\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\})$도 T가 될 수 있고 $(\{2,3\}, \{1\})$도 T가 될 수 있다.

지금 두개의 imputation $Y = (y_1, y_2, \cdots\cdots, yn)$, $X = (x_1, x_2, \cdots\cdots, xn)$가 있다고 하자. 어떤 結託 T가 있어 空集合이 아니고 다음 조건이 成立하면 Y는 T에 대해서 X를 우월 (dominate) 한다고 한다.

(i) $v(T) \geq \sum_{i \in T} Yi$

(ii) $Yi > Xi, \forall i \in T$

이때 이 T를 effective set 라고 한다.

Von-Neuman과 Margenstern은 다음 조건을 만족시키고 imputation의 集合A를 특성함수형에 있어서 게임의 解라고 한다.

(i) 만일 X, Y∈A면, X와Y는 서로 우월하지 않다.

(ii) A에 속하지 않은 乙에 대해 乙를 우월하는 imputation 이 최소한도 하나이상 A안에 있어야 한다.

예로써 Constant-Sum 3人게임의 예를 들어보자. 이 게임의 0,1 正規化는 다음과 같이 하나 있다.

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$$

$$v(\{1,2\}) = v(\{2,3\}) = v(\{1,3\}) = 1$$

$$v(\{1,2,3\}) = 1$$

그런데 여기서 結託{1,2}를 생각해 보면 結託해서 1을 받게 되는데 참가자 1과 2가 꼭같이 나눈다고 볼 수 있다. 다른 結託에도 똑같이 適用된다. 그래서

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

의 세개의 imputation이 서로 우월하지 않는 imputation이 된다. 이 集合을 F라고 하자. 그러면 예를 들어 $\left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$은 F에 속하지 않는다. 그런데 F에 속하는 $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$은 結託 {1,2}에 대하여 $\left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$을 우월한다. 따라서 F는 解의모든 條件을 갖추고 있어 이 게임의 해가된다.

Ⅵ. Game Against Nature

1. 序 論

Game against Nature는 게임을 운영하는 편이 하나 있는 경우이다. 그러나 이 게임을 운영하는 者가 여러가지 戰略을 가지고 最適의 것을 選択할려고 할때, 예를 들어 여러가지 基準에 비추어 選択하게 된다. 이렇게 볼때 게임을 운영하는 者는 결국 둘인데 하나는 利害에 적극적으로 行動하는 반면 다른 하나는 利害에 관심이 없는 者로 보면 2人게임으로 볼 수 있다. 그러나 물론 利益(payoff)은 1人에 한하여 뜻이 있게 된다. 이때 후자를 Nature라 한다.

이 Game against Nature는 under certainty의 경우, under risk의 경우, 그리고 under uncertainty의 경우 3가지로 나누어지는데 under certainty는 Nature가 가지는 戰略이 하나인 경우가 되며 이 때의 게임은 단순하게 된다. Game under risk는 Nature가 가지는 戰略에 拡率分布가 주어지는 경우를 말한다. 그런데 이렇게 확율분포가 주어지면 확율처리를 해줌으로써 처리된다. 그래서 앞으로는 Under Uncertainty의 경우만을 다루기로 한다.

2. 모델의 定立

게임을 운영하는 2人중 利害에 積極的으로 行動하는 者를 意思決定權者(Decision maker), 그리고 다른 者를 Mature라고 한다. 지금 意思決定權者의 戰略을 A_1, A_2, ……, An이라고 하자. 그리고 Nature의 戰略을 State라고 부르는데 이 state를 s_1, s_2, ……, sn이라고 하자. 그리고 Ai와 Sj에 대한 利益(payoff)는 Uij라고 하자. 그러면 다음과 같은 行列이 이루어진다.

$$(A,\ S,\ U) = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ Am \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & \cdots\cdots & Sn \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} U_{11} & U_{12} & \cdots\cdots & U_1 \\ U_{21} & U_{22} & \cdots\cdots & U_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \\ Um_1 & Um_2 & \cdots\cdots & Umn \end{array} \right) \end{array}$$

3. 例

오므렛트의 문제로써 어떤 주부가 접시에 다섯개의 달걀을 이미 깨뜨려 두고 있다. 그런데 여섯번째의 '달걀을 들고 이것을 깨뜨려 섞어 여섯개의 오므렛트를 만들 것인지 아니면 여섯개째가 썩은 달걀인지 모르니 다른 그릇에 깨뜨려 보아 섞을 것인지 망설이고 있다. 이 상황을 行列로 표시해 보면 다음과 같다.

state 戰 略	썩 은 달 걀	좋 은 달 걀
다섯개와 아예 썩어 버린다.	오므렛트를 못 먹음	여섯개의 오므렛트
다른 접시에 일단 깨뜨린다.	다섯개의 오므렛트 그리고 접시를 씻어야됨	여섯개의 오므렛트 그리고 접시를 씻어야됨
버린다.	다섯개의 오므렛트	다섯개의 오므렛트 그리고 달걀하나 버림

4. 解

지금 어떤 利益行列(payoff matrix) (A, S, U)가 주어졌다고 하자. 그런데 game againct Nature의 境遇에는 決定權者는 하나 뿐이기 때문에 이 決定權者가 어떤 基準(criteria)을 사용하여, A중의 戰略하나를 選択하느냐하는 것이다. 그래서 Game against Nature에서는 다음 절에서 설명할 기준을 사용하여 最適의 戰略을 選択하면 그것이 바로 解가 된다.

5. 決定基準(Decision Criteria)

Game against Nature에 適用되는 결정기준은 利益(payoff)의 형태 즉 實數로 주어지느냐, 아니면 順序로써 주어지느냐에 따라

다르다. 그러나 여기에서는 그 利益이 實數로 주어지는 경우의 基準을 論議하기로 한다.

(1) Maximin 基準(Wald 基準이라고 함)

이 기준의 기본 着想은 安全水準(security level)을 最大化하는 것이다. 따라서 다음 관계식을 만족시키는 Ak(eA)를 최적의 해로 選択한다. 이때 이 Ak를 Maximin基準에 의한

$$\min_{j} U_{kj} \geq \min_{j} U_{ij} \ \forall j$$

最適의 解라고 한다.

(2) Maximin-regret 기준(Savage 基準이라고도 함)

이 基準의 基本 着想은 危険負担(risk or regret)를 줄이자는 데 있다. 그래서 주어진 利益行列(A, S, U)에서 각 Uij 일때 最大 危険負担인 $R_{ij} = U_{ij} - \max_{h} U_{hj}$ 을 정의한 다음 다음 식을 만족시키는 Ak를 選択하여 이 Ak를 최적의 해로 삼는다.

$$\min_{j} R \cdot R_{j} \geq \min_{j} R_{ij} \ \forall i$$

예를 들어 지금

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 100 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots \text{payoff matrix}$$

과 같이 利益行列이 주어졌다면 이 行列에서 危険負担行列을 만들면 다음과 같이 된다.

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -99 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots \text{ regret payoff matrix}$$

따라서 여기서는 A_1가 Maximin-regret 基準에 의하여 최적의 해가 된다.

(3) Hurwicz's α 기준

이 Hurwicz's α基準은 maximin基準이 소극적인 選択과 각 列의 maximum을 구하여 최선의 戦略을 選択하는 적극적인, 낙관적인 選択사이의 戦略을 구할려고 하는 着想에서 만들어졌다.

지금 $M_i = \underset{j}{\mathrm{Min}}\ U_{ij}$, $M_i = \underset{j}{\mathrm{Max}}\ U_{ij}$

라고 두자. 이때 $0 < \alpha < 1$인 α에 대해 다음 式을 만족시키는 戦略을 選択하여 이것을 최선의 戦略으로 한다. 이러한 方法을

$$\alpha M_k + (1-\alpha) M_k > \alpha M_j + (1-\alpha) M_j \quad j$$

Hurwicz's α基準이라고 하며 결국 $\alpha = 1$로 두면 이 基準은 Maximin基準이 되고 $\alpha = 0$로 두면 Maximax 기준이 된다.

(4) Laplace基準

이 基準은 다음 條件을 만족시키는 Ak를 최적의 해로 삼는다.

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} U_{kj} > \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} U_{ij} \ \forall i$$

結　　論

現在 南北韓의 政治的 関係는 世界 어느나라 보다 複雜한 処地에 놓여 있다고 볼 수 있다. 南韓, 北韓의 대치, 주변국가 즉 日本, 中共, 소련과의 関係 나아가 미국등 国際関係가 複雜하게 얽혀 있다. 어떤 哲理, 行動規範에 움직이는 것도 아니다. 어떤 경우에는 힘에 左右되며 어떤때는 국가원수 個人의 취향에 의해 状況이 左右된다. 이렇게 볼때 状況을 파헤치고 状況의 解決을 찾을 수 있는 節次, 基準이 대단히 모호하게 된다.

그러나 어떠한 경우이든 간에 어떤 政治状況의 変化에는 外的이든 内的이든 変化의 pattern이 있고 이 pattern을 추구하게 된다.

이러한 patterm은 그 구조를 명확히 把握하기 힘들때는 巨視的 方法으로 状況을 総體的으로 定性的으로 다루게 되며 그 構造를 나아가 변천과정을 把握할 수 있을때는 좀더 微視的 分析的 方法을 사용하며 状況을 다룰수 있다. 그런데 巨視的 方法으로 状況을 分析하든 微視的 方法으로 状況을 分析하든 分析을 行動, 주의적 직관에 의존할 수 있겠고 아니면 비록 状況을 定量化하기는 힘든다 하더라도 모델등을 이용해서 좀더 과학적이고 體系的으로 추진할 수 있다. 여기에서는 이런 경우에 사용 가능한 일부

모델을 소개한다.

그런데 南北韓 狀況에 應用될 수 있는 게임모델은 크게 나누어 두가지로 분류될 수 있다. 하나는 게임理論的 모델이며 또 하나는 게이밍(Gaming)的 모델이다.

Gaming모델은 실제의 狀況을 그대로 規模를 縮少하여 또는 구조를 단순화 시켜 再現 또는 예상하여 實現시켜 보는 方法이다. 이러한 狀況變化의 構造를 把握하면 必要없으나 狀況의 構造를 把握치 못하면 실제를 再現시켜 보는 수 밖에 없게 된다. 그러나 실제를 再現시킨다는 것은 많은 資源이 소요되기 때문에, 따라서 규모를 축소시키거나 또한 구조를 단순화 시킬 수 밖에 없게 된다.

이 Gaming에 비하여 게임理論的모델은 실제상황을 모델化하여 다루는 方法이다. 모델化하는데는 실제 狀況의 構造를 正確히 把握해야 할 必要가 있으나 비록 把握치 못하더라도 모델化 시킬 수는 있다.

그런데 이러한 모델은 실제 狀況을 모델化 하는 것이기 때문에 실제 狀況에 적합한 모델은 실제 狀況만큼 그 숫자가 많을 것이다. 다시 말하자면 모델의 수는 無限일 것이다. 그러나 실제를 그대로 모델化 한다는 것은 불가능할 것이기 때문에 실제상황을 分類(도표 참조)해서 각 分類에 알맞는 모델을 만들게 된다.

이러한 여러형태의 모델중에서 2人게임과 N-人게임 그리고

game against Nature가 우리들의 南北韓 政治状況에 応用될 수 있는 게임모델 들이다. 이외에도 여러 다른 모델이 있으나 여기에서 2人의 경우 N-人 경우의 政治状況에 알맞는 모델만 소개하기로 한다.

- 게임모델
  - 2人게임
    - 非協助的 (non-Cooperative)
      - 零和 (zero-sum)
      - 非零和 (non-zero-sum)
    - 協助的 (Cooperative)
  - N人게임
    - 比協助的 (non-Cooperative)
    - 協助的 (Cooperative)
  - Game against Nature
  - Differential game, stochastic game

〈게임의 分類〉

2人 零和게임은 우선 player (参加者)가 둘이어야 한다. 물론 이때 参加者는 個人일 경우도 있고 団體일 수도 있으며 国家일 수도 있다. 어떤한 경우이든 利害가 관련된 者는 둘 밖에 없어야 한다.

이 2人은 각각 戰略集合을 가지고 있고 각 참가자의 戰略은 상대방의 戰略과는 상호 独立이다. 그리고 각 참가자의 戰略集合 각 상호간 역시 独立性이 維持되어야 한다.

그리고 2人이 게임을 운용할때 서로 의견을 교환하거나 協商할 기회가 전혀 없으며 또한 상대방이 어떠한 戰略을 選択할 것인지에 대해서도 전혀 情報가 없다. 따라서 서로 전혀 상대방을 모른체 게임을 하게 된다. 이러한 状況을 非協助的(non-Cooperative), strictly competitive라고 하며 零和게임은 이러한 状況에서 이루어 진다.

2人 零和게임에서 参加者1에 대한 利得은 바로 参加者2의 損害이고 그 반대도 成立하는 参加者2인의 利得과 損害가 일치하는 경우를 다루게 된다. 따라서 각 참가자의 利得과 損害를 合하게 되면 零이 되고 만다.

이 2人 零和게임은 결국 参加者1은 그의 利得을 最大化할려고 하고 参加者2는 그의 損害를 最小化할려고 한다. 결국 参加者 1에게는 어떠한 戰略이 그의 利得을 최대화시키는 것이며, 参加者 2에게는 어떠한 戰略이 그의 損害를 최소로 줄이는 것인지를 찾아

낼려고 한다.

2人 零和게임에서 参加者 1의 戰略을 A_1, A_2, ……, A_m이라고 하고 참가자2의 戰略을 B_1, B_2, ……, B_n라고 하고 그 集合을 각각 A, B라고 하자. 그리고 参加者1이 A_i라는 戰略을 그리고 参加者2가 B_j라는 戰略을 選択했을 때 参加者1에 돌아가는 利得(payoff)을 U_{ij}, 参加者2에게 돌아오는 利得을 $-U_{ij}$라고 하자.

이때 2人零和게임을 行列로 표시할 수 있으며 보통 참가자1 즉 이 게임에서 참가자 2인중 利益面에서 基準을 삼는 者를 왼쪽 즉 列의 위치에 두고 상대방을 윗쪽 즉 行의 위치에 둔다. 따라서 다음과 같은 行列이 된다.

参加者2

$$\text{参加者1} \quad \begin{array}{c|cccc|} & B_1 & B_2 & \cdots\cdots & B_n \\ A_1 & U_{11} & U_{12} & \cdots\cdots & U_{1n} \\ A_2 & U_{21} & U_{22} & \cdots\cdots & U_{2n} \\ & & & & \\ A_m & U_{m1} & U_{m2} & \cdots\cdots & U_{mm} \end{array} \quad \text{利得行列 (payoff mafrix)}$$

여기서 U_{ij}는 参加者1에게는 利得 参加者2에게는 損害를 뜻하게 된다. 이 行列을 (A, B, U)라고 표기하기로 한다. 이 行列을 利得行列(payoff matrix)이라고 하며 2人零和게임 운용의

基本 모델이 된다. 이 行列때문에 2人零和 게임을 行列게임 (matrix game)이라고도 한다.

2人零和게임에서는 參加者1이 자기의 利益을 최대화하고 參加者 2는 자기의 損害를 최소화할때 單純戰略으로써 각자의 目標를 달성할 수도 있고 그렇지 못할때는 混合戰略으로써 각자의 目標를 達成하여야 한다.

그런데 이 混合戰略을 許容할 때 2人 零和게임에서는 각자의 目標를 달성시켜 주는 戰略 즉 解를 찾을 수 있다. 이 定理를 게임理論의 기본정리라고 한다.

이 解를 구하는 方法은 여러가지 方法이 있으나 가장 널리 사용하는 方法은 Simplex法과 축차 근사법이다.

2人非零和게임은 零和게임의 경우 參加者1과 2가 利益이 完全히 상반하는 경우와 달리 각자의 利益과 損害가 일치하지 않는 경우를 통털어 일컫는다. 이런 경우 利益과 損害의 차이가 무한일 수도 있겠으나 여기에서는 有限한 경우만을 다룬다. 零和게임은 非零和게임의 특수한 경우로 볼 수 있다.

이 零和게임에서는 두 參加者가 正確히 상반되는 利益과 損害額을 가지기 때문에 零和게임이 하나의 行列 즉 利得行列로써 표현할 수 있는데 비해 이 非零和게임에서는 두개의 行列로써 표현하게 된다.

지금 參加者1의 戰略을 $i = 1, 2 \cdots\cdots m$라 두고 參加者 2의 戰略

을 j = 1, 2 …… n 라고 둘 때

aij : 參加者 1 가 i 戰略을 그리고 參加者 2 가 j 戰略을 사용 할때 참가자 1 이 받는 利益

bij : 참가자 1 가 i 戰略을 그리고 參加者 2 가 j 戰略을 사용 할때 참가자 2 가 받는 利益

라 둔다.

$$(A, B) = \begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}), & (a_{12}, b_{12}), & & (a_{1}n, b_{1}n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (am_{1}, bm_{1}), & (am_{2}, bm_{2}) & & (amn, bmn) \end{pmatrix}$$

로 표현된다. 이 게임을 Bimatrix게임이라고 부른다.

이 Bimatrix게임은 두가지 경우가 있다. 즉, 어떤 형태의 結託이라도 許容되지 않는 非協助 境遇와 結託이 許容되는 協助的인 境遇의 두경우가 있다.

非協助的인 경우에는 다음 조건을 만족시키는 混合戰略 (X^*, Y^*) 을 平衡点이라고 한다. 이 平衡点은 어떠한 Bimatrix게임에

$$X \quad AY^{*\prime} < X \quad AY^{*\prime}$$

$$X^* \quad BY' < X \quad AY^{*\prime}$$

도 存在하며 이 平衡点들이 서로 可換일때 이 平衡点을 解라고 한다.

協助的인 게임의 경우에는 參加者들이 協助해서 얻어지는 利得의 集合중에서 각 參加者에게 그가 Maximin 戰略을 사용해서 독자적

으로 보장 받을 수 있는 최대량을 보장하는 부분을 negociation set라고 하고 이 negociatian set의 각 점을 解라고 한다.

N人게임은 2人게임과 여러가지면에 다른 점이 많지만 크게 다른 点은 2人의 게임 경우 結託(coalition)이란 것이 없지만 N人경우 즉 3人이상의 경우 그 일부가 서로 結託하여 타인과 대결할 수 있는 가능성이 있다는 것이다. N人게임에서는 이러한 結託때문에 複雜한 문제가 많이 야기된다. 結託은 모든 가능한 경우를 許容할 수도 있고 어느 정도의 제한을 가하면서 게임을 처리할 수 있다.

(1) Side payment

그리고 Side payment의 문제도 야기된다. 結託을 할 때 結託하는 상대방에게 별도의 콤미션이든 어떠한 形態의 Side payment를 줄 수 있다. 따라서 N人게임에서는 참가자 상호 의사소통하여 結託이 가능한지 아닌지 또한 Side payment가 있는지 없는지의 경우등으로 분류될 수 있다.

N人게임에서는 참가자가 N人이 있고 이 參加人 集合을 In이라고 두고 각 參加人의 戰略集合을 각각 s_1, s_2 …… sn과 둔다.

그리고 각 參加者가 si라는 戰略을 択할때 參加者 i에게 돌아오는 利益이 Mi(s_1, s_2 …… sn)가 되는 n개의 実数値 利益函数(payoff function) M_1, M_2, ……… Mn가 있다고 하자. 이때 이러한 形態로써 게임을 처리할 때 Normal form이라고 한다.

여기에서 Si의 si는 각기 単純戦略이 되겠으나 각 si에 대해 i(si)의 確率을 주는 $i = (i(s_1), \cdots\cdots, i(sn))$을 생각하면 이 i가 곧 混合戦略이 된다. 이 混合戦略에 대해서는 $i(si) > 0$ 그리고 $\sum_{siESj} i(si) = 1$이 된다. 그러면

$$Mj(s_1, s_2, \cdots\cdots, k, \cdots\cdots, sn) = \sum_{siESk} i(si)Mj(s_1, s_2, \cdots\cdots, sk, \cdots\cdots sn)$$

가 成立된다.

N人 非協助게임에서는 2人 非協助게임과 비슷한 면이 많으며 N人게임 역시 混合戦略을 許容할 때는 반드시 平衡点이 存在하게 된다.

(2) 結託(coalition)

参加者의 集合 In에서 이 In의 部分 集合을 結託이라고 한다. 이 部分集合은 参加者 In에서 部分集合 S만큼 서로 結託한다는 뜻이다. 어떠한 結託도 許容한다면 In의 모든 部分集合이 結託이 되는 셈이다.

따라서 結託이 許容되지 않는 경우 예를 들어 非協助的 경우에는 2人이상의 結託이 이루어지지 않기 때문에 예를 들어, $I_3 = \{1, 2, 3\}$이라고 할때 이 I_3의 結託構造는 ({1}, {2},

{3}) 이게 된다. 그러나 모든 結託이 許容된다면 이때의 結託構造는 ({1},{2},{3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3}) 이게 된다.

(3) 特性函数 (Charactericlic function)

特性函数란 参加者의 集合 In 의 部分集合에 S 에 実数를 주는 函数로써 다음 조건을 만족하는 実数値函数를 뜻한다.

、즉,

$$v : \{S\ In\} \rightarrow \{\text{実数}\}$$

$$S \rightarrow v(S) : \text{어떤 실수}$$

로써

(i) $v\ (In) = 0$

(ii) $v\ (S) = -v(-s)$, 단 모든 部分集合 S In에 대해서

위의 조건을 만족하면 특성함수라 한다.

그런데, 零和게임이 되면 특성함수는 다음의 조건들을 만족시킨다.

N人協助게임에서는 side payment을 転移可能하다고 보고 그리고 結託이 可能한 점을 考慮하여 特性函数의 形態로 다루게 된다.

特性函数란 参加者集合의 부분집합에 実数値를 주는 函数를 말한다.

N人協助게임에서의 解는 Imputation의 集合으로써 상호 우월하

하지 않고 이 집합에 속하지 않는 Imputation은 상기集合의 한 Imputation에 우월당할 때 그 集合을 解라고 한다.

Game against Nature는 게임을 운영하는 편이 하나 있을 경우이다. 그러나 그 게임을 운영하는 者는 여러개의 戰略을 가지고 最適의 것을 選択할려고 할때 예를 들어 여러가지 基準에 비추어 選択하게 된다. 이렇게 볼때 결국 게임을 운영하는 者는 둘인데 하나는 利害에 적극적으로 행동하는 반면 다른 하나는 이해에 관심이 없는 者로 보면 2人게임으로 볼 수 있다.

그러나 물론 利益(payoff)은 1人에 한하여 뜻이 있게 된다. 이때 후자를 Nature라 부른다.

게임을 운영하는 2人중 利害에 積極的으로 行動하는 者를 意思決定權者(Decision maker), 그리고 다른 者를 Nature라고 한다. 지금 意思決定權者의 戰略을 $A_1, A_2, \cdots\cdots, Am$이라고 하자.

그리고 Nature의 戰略은 state라 부르는데 이 state를 $s_1, s_2, \cdots\cdots, sn$이라고 하자. 그리고 Ai와 Sj에 대한 利益(payoff)은 Uij라고 하자. 그러면 다음과 같은 行列이 이루어 진다.

이 行列에서 決定權者에게 最適의 戰略을 選択해 주는 基準을 決定基準(Decision Criterion)이라고 하며 여기서는 Maximin 基準, Maximin-regret 基準, Hurwicz's α基準 및 Laplace 基準등이 소개된다.